Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Neka je $\square ABCD$ raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

(20%) b) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(60%) c) Visina iz vrha A trougla $\triangle ABC$ presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

Zadatak br. 2

(40%) a) Dat je krug $k(I, r)$ i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

(60%) b) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao $\triangle MAB$, sa osnovicom AB, tako da $A \in a$, $B \in b$ i $p(A, B) \| c$.

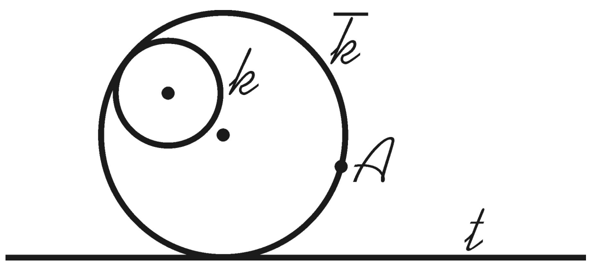
Zadatak br. 3

(20%) a) Za dva data kruga konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(20%) b) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

(60%) c)

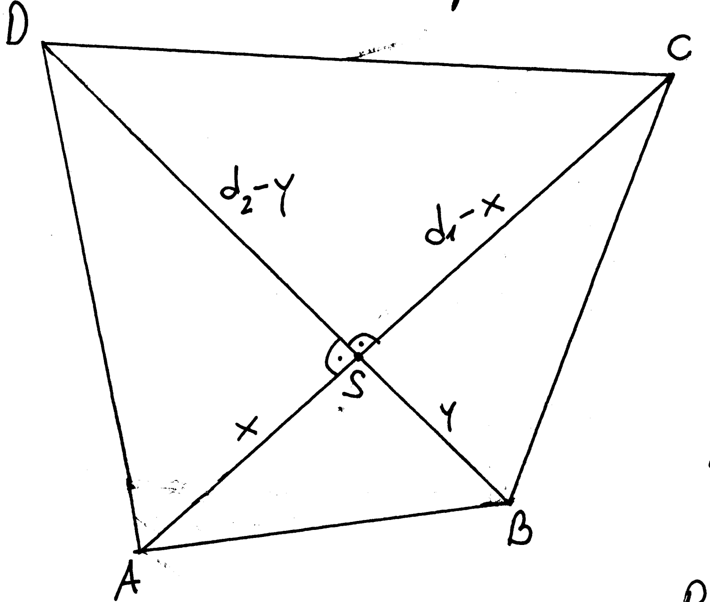
Dati je krug $k(O, r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O}, \bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A i dodiruje krugove k i pravu t kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



Zadaci su skinuti sa stranice pf.unze.ba/nabokov.
Za uočene greške pisati na *infoarrt@gmail.com*

(#) Neka je □ABCD raznostraničan četverougao čije se dijagonale d_1 i d_2 sijeku pod pravim uglom. Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) izvesti formulu za površinu $P=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$ datog četverougla.

Rj.



Tačku presjeka dijagonala označimo sa S, označimo sa x duž AS i sa y duž BS.

Tada je $CS=d_1-x$, $DS=d_2-y$

$P_{\triangle ABS}=\frac{x\cdot y}{2}$, $P_{\triangle BCS}=\frac{y\cdot(d_1-x)}{2}$

$P_{\triangle CDS}=\frac{(d_2-y)(d_1-x)}{2}$, $P_{\triangle ASD}=\frac{x\cdot(d_2-y)}{2}$

$$P_{\square ABCD}=P_{\triangle ABS}+P_{\triangle BCS}+P_{\triangle CDS}+P_{\triangle ASD}=\frac{\cancel{xy}+yd_1-\cancel{xy}+d_1d_2\boxed{-d_2x}-d_1y+\cancel{xy}\boxed{+d_2x}-\cancel{xy}}{2}$$

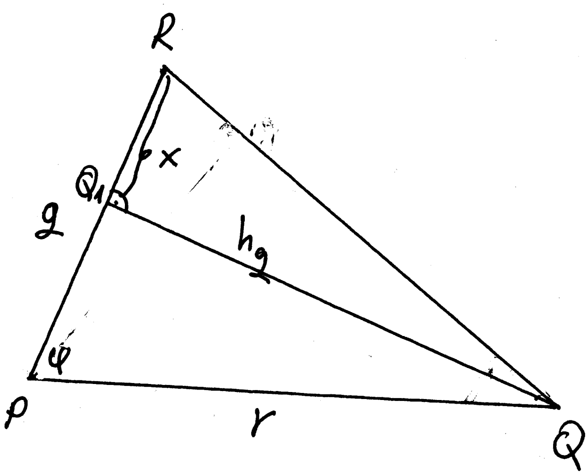
$$=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$$

tj. $P_{\square ABCD}=\frac{d_1\cdot d_2}{2}$

q.e.d.

(#) Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $\underline{P = \frac{r \cdot g}{2} \sin\varphi}$.

Rj.



Neka je $QQ_1 = h_g$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi = \frac{h_g}{r} \Rightarrow$$

$$h_g = r \sin\varphi \quad \ldots (1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P = \frac{h_g \cdot g}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x = RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR} = P_{\Delta PQQ_1} + P_{\Delta QRQ_1} = \frac{(g-x) h_g}{2} + \frac{x \cdot h_g}{2} = \frac{g \cdot h_g}{2}$$

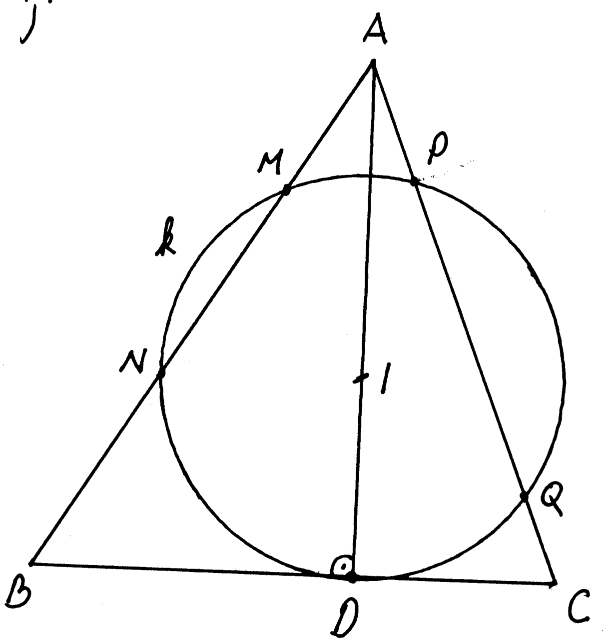
Prema tome

$$P_{\Delta PQR} = \frac{h_g \cdot g}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{r \cdot g}{2} \sin\varphi$$

q.e.d.

(#) Visina iz vrha A trougla ΔABC presjeca stranicu BC u tački D. Krug koji dodiruje stranicu BC u tački D, presjeca stranicu AB u tačkama M i N, a stranicu AC u tačkama P i Q. Dokazati da vrijedi jednakost $AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$.

Rj:



Kako krug k dodiruje stranicu BC u tački D to je njegov centar I na visini AD.

ΔABD pravougli

$$AD^2 = AB^2 - BD^2. \quad \ldots (1)$$

Dalje iz potencije tačke B u odnosu na krug k imamo

$$BD^2 = BN \cdot BM \quad \ldots (2)$$

(1) i (2) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 - BN \cdot BM \\ &= AB^2 - (AB - AN)(AB - AM) \\ &= \cancel{AB^2 - AB^2} + AB \cdot AM + AB\,AN - AM\,AN \end{aligned}$$

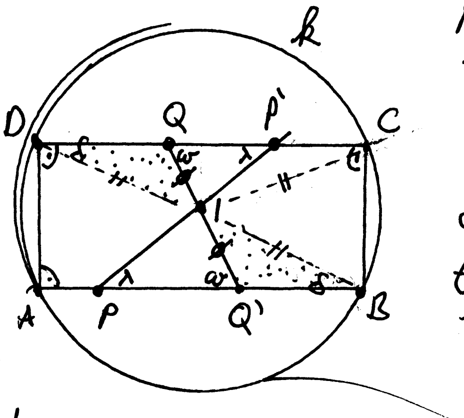
$$AD^2 + AM \cdot AN = AB(AM + AN)$$

q.e.d.

(#) Dat je krug k i date su dvije tačke u unutrašnjoj oblasti kruga. U dati krug upisati pravougaonik čije dvije stranice prolaze kroz dvije date tačke. Analizirati oba slučaja: kada date tačke pripadaju naspremnim stranicama i kada date tačke pripadaju susjednim stranicama.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\square ABCD$ traženi pravougaonik, gdje su tačke P i Q date tačke koje pripadaju stranicama pravougaonika.



Kako je ugao nad prečnikom pravi to su dijagonale pravougaonika ujedno i prečnici od k tj. $AC \cap BD = \{I\}$

I slučaj:

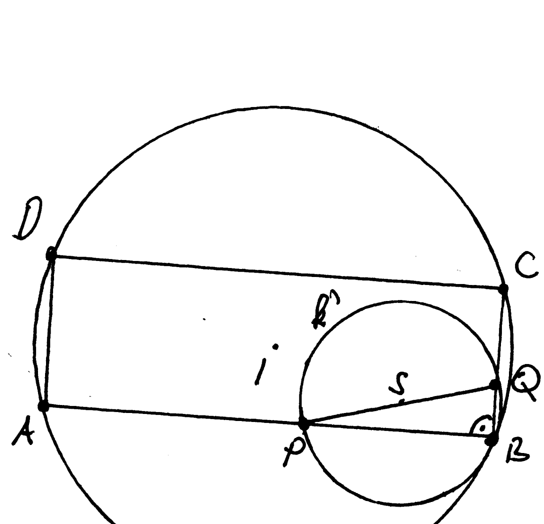
Tačke P i Q pripadaju suprotnim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in CD$. Neka je $p(P,I) \cap CD = \{P'\}$ i $p(Q,I) \cap AB = \{Q'\}$. Postavljamo pitanje: Da li je $\Delta PQ'I \cong \Delta IP'Q$? Da, ova dva trougla su podudarna (na osnovu UUS $\Rightarrow \Delta Q'BI \cong \Delta QDI \Rightarrow$ na osn. UUS $\Rightarrow \Delta PQ'I \cong \Delta P'QI$)

ZA VJEŽBU OVO RASPISATI

Sad kako možemo konstruisati tačke P' i Q' time možemo konstruisati i prave $p(P,Q')$, $p(Q,P')$ a time i traženi pravougaonik.

II slučaj

Tačke P i Q pripadaju susjednim stranicama, recimo $P \in AB$, $Q \in BC$. Kako je $\measuredangle ABC = 90°$ To je i $\measuredangle PBQ = 90° \Rightarrow \Delta PBQ$ je pravougli. $\Rightarrow$ centar S kruga opisanog oko ΔPBQ se nalazi na sredini PQ.



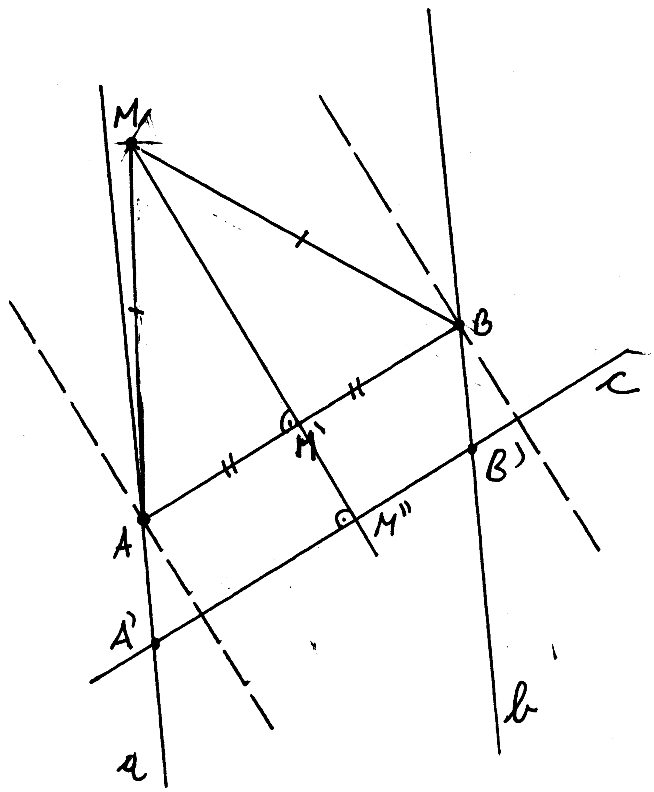
Kako su P i Q dvije date tačke, to nije teško konstruisati tačku B a poslije nje i pravougaonik $ABCD$.

#) Date su paralelne prave a i b, tačka M između njih i prava c koja nije paralelna ni sa a, ni sa b. Konstruisati jednakokraki trougao ΔMAB, sa osnovicom AB, tako da $A\in a$, $B\in b$ i $p(A,B)\parallel c$.

Rj.:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABM traženi jednakokraki trougao takav da $A\in a$, $B\in b$, $a\parallel b$, $p(A,B)\parallel c$, $c\nparallel a$, $c\nparallel b$, M tačka između pravih a i b.



Ako iz vrha M spustimo visinu MM' na osnovicu AB nije teško pokazati da je $AM'\cong BM'$ tj. da je M' sredina AB (ovo možemo zaključiti iz $\Delta AM'M\cong\Delta BM'M$ gdje podudarnost trouglova slijedi iz SSU).

Dalje uvedimo oznake $c\cap a=\{A'\}$; $c\cap b=\{B'\}$, $p(M,M')\cap c=\{M''\}$.

Primijetimo da je $\square A'B'BA$ paralelogram (ZAŠTO?), pa je

$$AB\cong A'B'$$

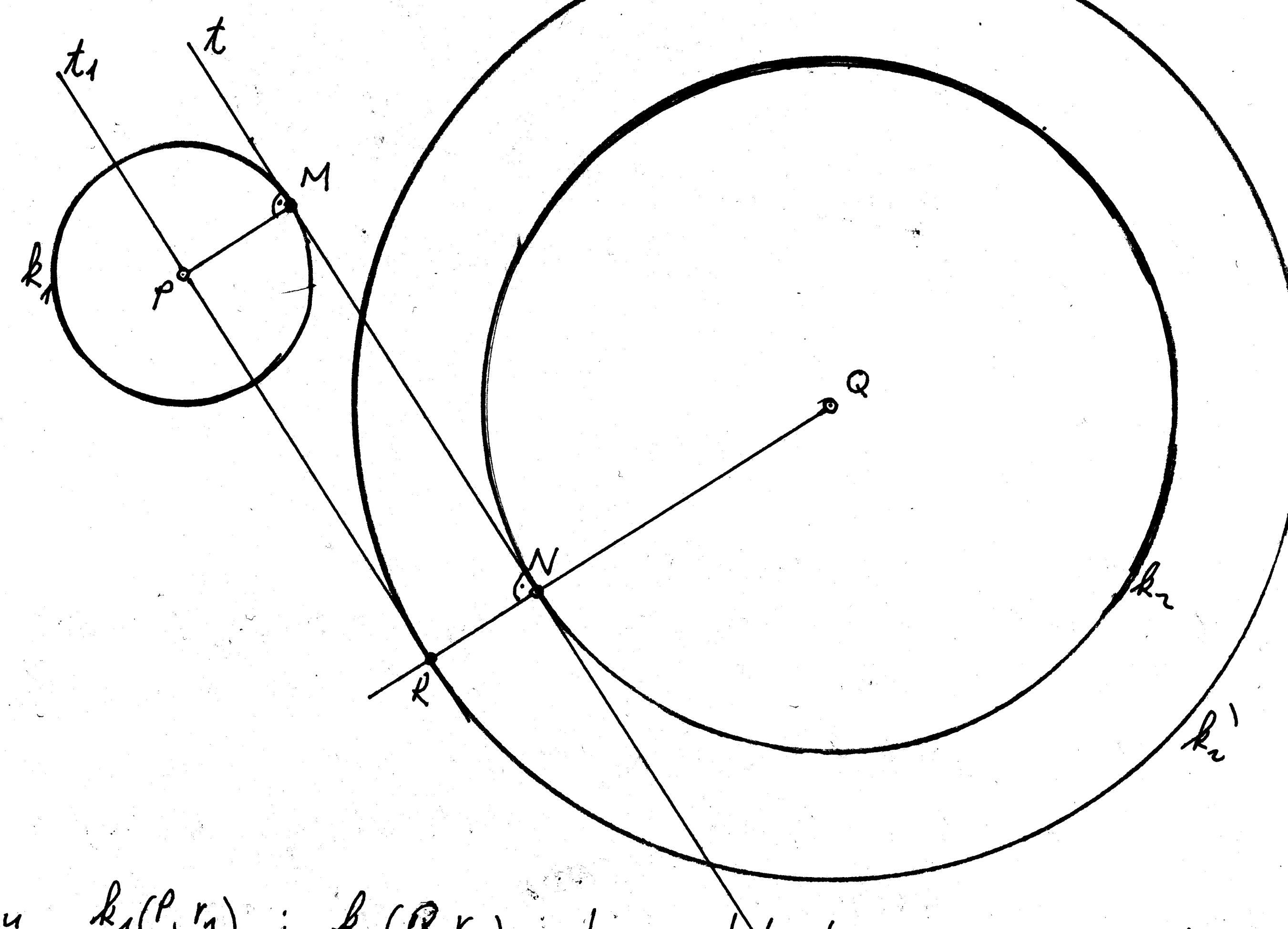
$\Rightarrow$ poznata nam je dužina od $\frac{1}{2}AB$.

Kako nam je data tačka M i prava c to tačku M'' možemo konstruisati ($\sphericalangle MM''c=90^\circ$). Kako se tačke A i B nalaze na udaljenosti $\frac{1}{2}AB$ od prave $p(M,M'')$, a poznate su nam prave a i b, to tačke A i B nije teško konstruisati, a poslije njih i ΔABM.

(#) Konstruisati unutrašnju zajedničku tangentu dvijema datim kružnicama.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su $k_1(P, r_1)$ i $k_2(Q, r_2)$ dvije date kružnice i neka je t njihova zajednička tangenta. Označimo sa M i N tačke dodira tangente t sa k_1 i k_2 redom.

$PM \perp t$ i $QN \perp t \Rightarrow p(P,M) \parallel p(Q,N)$

Neka je $t_1 \parallel t$, $P \in t_1$ i $t_1 \cap p(Q,N) = \{R\}$: $Q-N-R$.

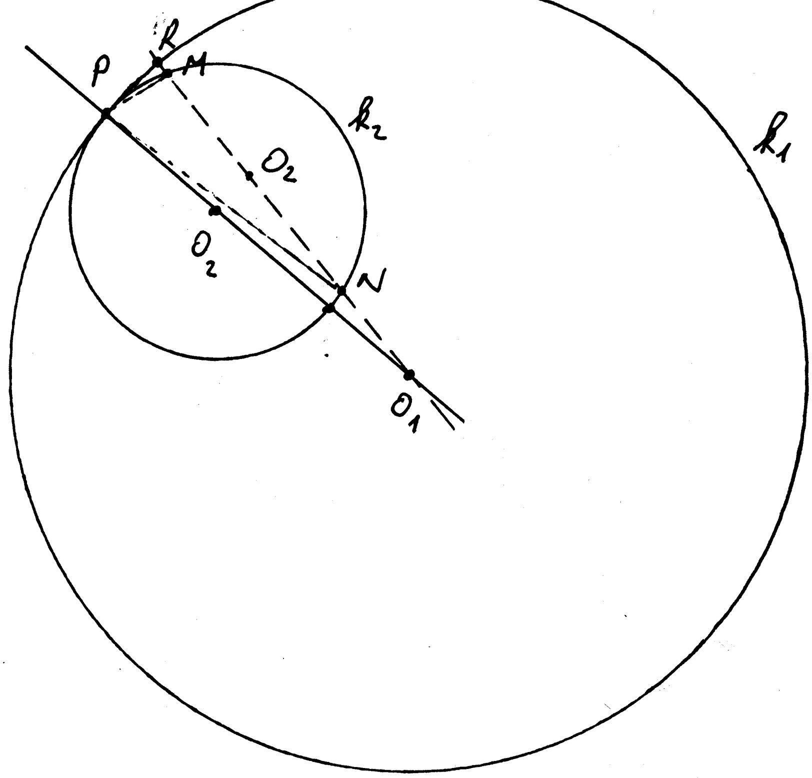
$QR = QN + NR = r_2 + r_1$. Označimo sa $k_2'(Q, QR)$.

Kako kružnicu k_2' mogu konstruisati, to mogu konstruisati i tačku R (tangenta na kružnicu k_2' iz tačke P).

Kako je $PM = NR$, $N \in t$ i $t_1 \parallel t$ to možemo konstruisati i traženu tangentu t.

(#) Dat je krug $k_1(O_1, r_1)$ i u njegovoj unutrašnjosti krug $k_2(O_2, r_2)$ takav da dodiruje krug k_1 u tački P. Dokazati da su tačke O_1, O_2 i P kolinearne.

Rj.



Posmatrajmo pravu $p(O_1, P)$. Ako tačka O_2 ne bi pripadala ovoj pravoj imali bi da $p(O_1, O_2) \cap k_2 = \{M, N\}$ gdje je MN prečnik kruga k_2. Recimo da je poredak $O_1 - N - O_2 - M$. Neka je R tačka na k_1 t.d. $N - M - R$.

Ugao nad prečnikom je prav tj. $\sphericalangle MPN = 90°$. Kako je $\sphericalangle MPO_1 > \sphericalangle MPN \Rightarrow \sphericalangle MPO_1$ je tup, pa u $\triangle MPO_1$ stranica MO_1 je najveća tj. $MO_1 > PO_1$

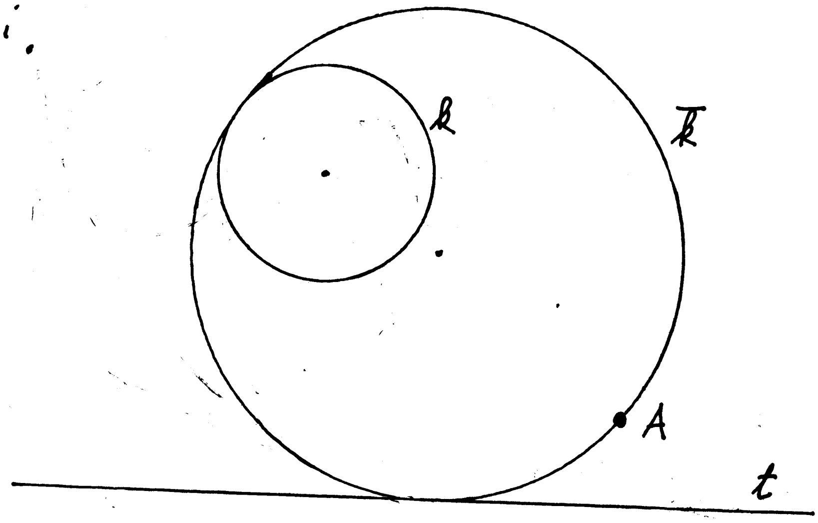
\# kontradikcija

(PO_1 i RO_1 su poluprečnici kruga k_1 i kako je $O_1 - M - R$ to je $MO_1 < PO_1$)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome tačke O_1, O_2 i P su kolinearne

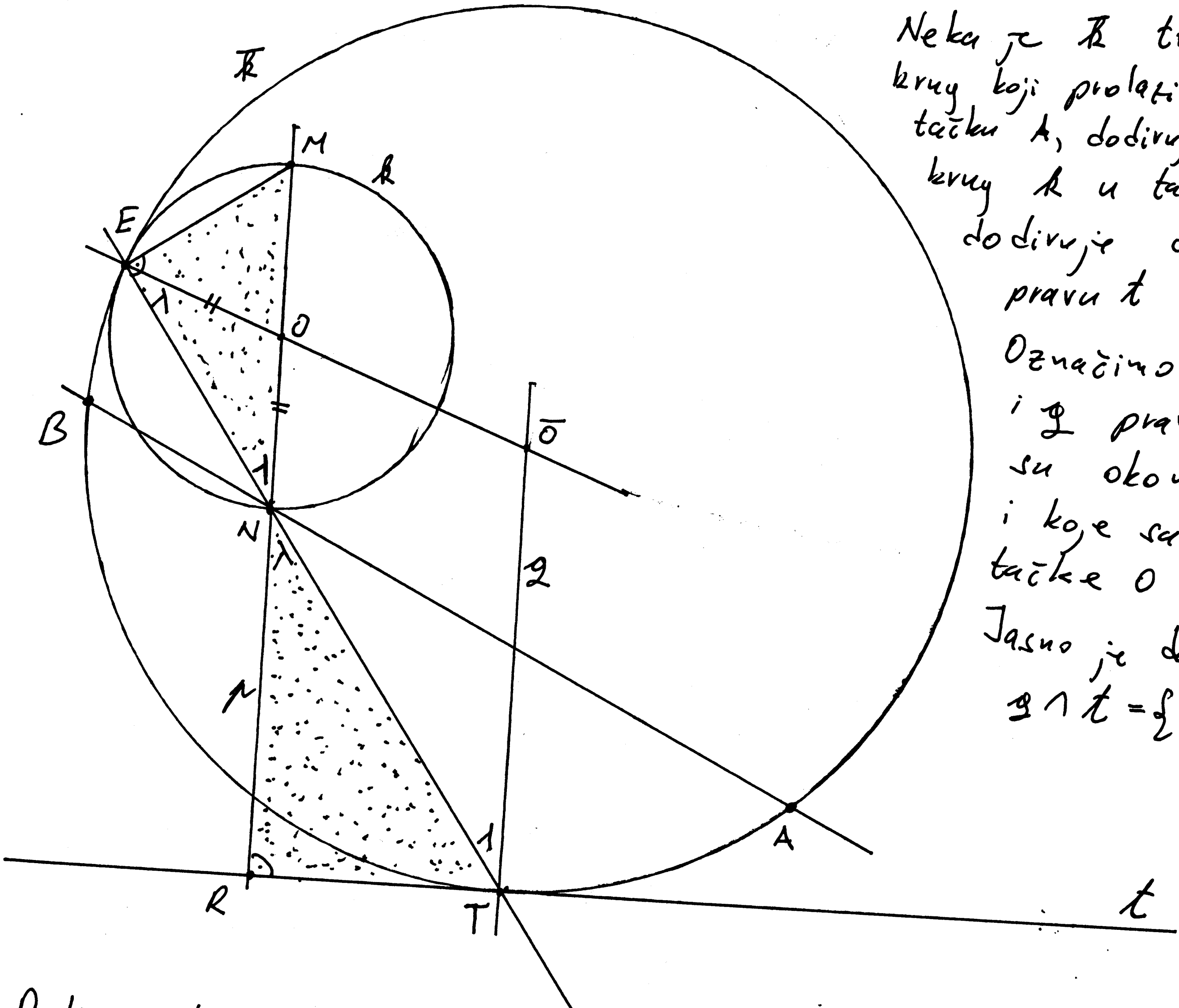
q.e.d.

(#) Dat je krug $k(O,r)$, tačka A i prava t. Konstruisati krug $\bar{k}(\bar{O},\bar{r})$ koji prolazi kroz tačku A, i dodiruje krug k i pravu t kao na skici.



Rj. <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\bar{k}$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A, dodiruje dati krug k u tački E i dodiruje datu pravu t u tački T. Označimo sa p i q prave koje su okomite na t i koje sadrže redom tačke O i $\bar{O}$. Jasno je da $q \cap t = \{T\}$.

Dalje, neka je $t \cap p = \{R\}$ i $p \cap k = \{M, N\}$ t.d. $R-N-M$

Prava $p(\bar{O}, E)$ prolazi kroz tačku O (ZAŠTO? Objasniti ovo).

Posmatrajmo sad trouglove ΔEON i $\Delta E\bar{O}T$.

Trougao $\Delta E\bar{O}T$ je jednakokraki ($E\bar{O} \cong T\bar{O}$) pa je $\measuredangle \bar{O}ET \cong \measuredangle \bar{O}TE = \lambda$. Isto tako ΔEON je jkk ($OE \cong ON$) pa je $\measuredangle OEN \cong \measuredangle ONE = \lambda$. Želimo pokazati da $N \in p(E,T)$. Kako je $p \parallel q$ i $p(N,T)$ transferzala to je $\measuredangle TNR = \lambda$

Sad na pravoj p imamo $\measuredangle TNR = \lambda = \measuredangle ONE \Rightarrow N \in p(E,T)$

Posmatrajmo ΔRTN i ΔENM. U njima imamo po jedan ugao od $90°$, ugao λ pa je i treći ugao podudaran.

$$\Delta RTN \overset{\text{(slič. UUU)}}{\Longrightarrow} \Delta RTN \sim \Delta ENM$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{NT}{NM} = \frac{NR}{NE} \Rightarrow NT \cdot NE = NM \cdot NR \quad \ldots (1)$$

Posmatrajmo pravu $p(N,A)$. Neka je $p(N,A) \cap K = \{A, B\}$ t. d. $B - N - A$. Ako posmatramo krug K imamo

$$NA \cdot NB = NT \cdot NE \quad \ldots (2)$$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow NA \cdot NB = NM \cdot NR$$

$$NB = \frac{NM \cdot NR}{NA} \quad \ldots (3)$$

Sad, kako su nam poznate tačke A, N, M, R to možemo prema (3) možemo konstruisati tačku B pa smo naš problem sveli na konstrukciju kruga kroz dvije tačke A i B tako da dodiruje datu pravu. Ovaj problem smo već imali, nije teško konstruisati pomoćni krug i uz pomoć njega dobiti tačku T.

Prema tome, traženi krug možemo konstruisati.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 24.07.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Dat je raznostraničan trougao $\triangle ABC$, i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da je $\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$.

(20%) b) Raznostraničan trougao $\triangle ABC$, ima dužine stranica a, b i c. Neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \frac{ac}{a+b}$.

(60%) c) Neka je $\triangle ABC$ raznostraničan trougao i neka je $\triangle EFG$ trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla $\triangle ABC$, gdje je $E \in AB$. Dokazati da
$P_{\triangle AEG} = P_{\triangle ABC} \cdot \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$.

Zadatak br. 2

(30%) a) Kroz tačku C pravouglog trougla $\triangle ABC$ konstruisati pravu koja će trougao podijeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

(70%) b) Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj dati krug odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

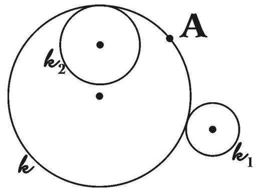
Zadatak br. 3

(20%) a) Konstruisati luk kruga (l) čiji su krajevi date tačke A i B, i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(20%) Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dva podudarna kruga sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(60%) c)

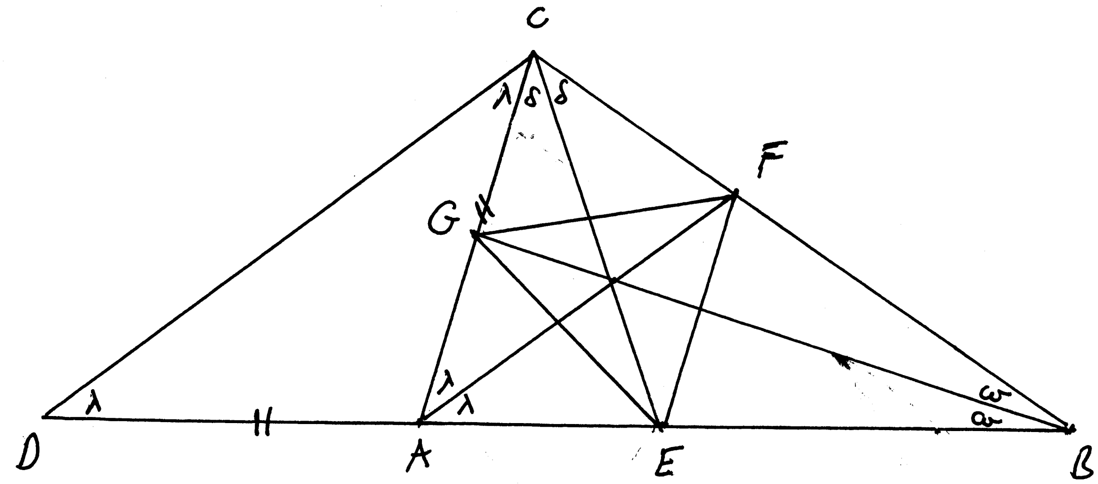
Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$, $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstrisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na skici. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)



(#) Dat je raznostraničan ΔABC, i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}.$$

Rj.



U ovom zadatku se u stvari traži da pokažemo da simetrala AF unutrašnjeg ugla $\measuredangle BAC$ ΔABC dijeli stranicu BC u omjeru druge dvije stranice.

Izaberimo tačku $D \in p(B,A)$ t.d. $B-A-D$ i $AD \cong AC$

ΔACD jkk $\Rightarrow \measuredangle ADC = \measuredangle DCA = \lambda$

$\measuredangle CAB$ je vanjski ugao $\Delta ADC \Rightarrow \measuredangle CAB = 2\lambda$

AF simetrala $\measuredangle BAC \Rightarrow \measuredangle BAF \cong \measuredangle CAF = \lambda$

$\measuredangle BAF \cong \measuredangle BDC = \lambda$ na pravoj $p(B,D) \Rightarrow p(A,F) \parallel p(D,C)$

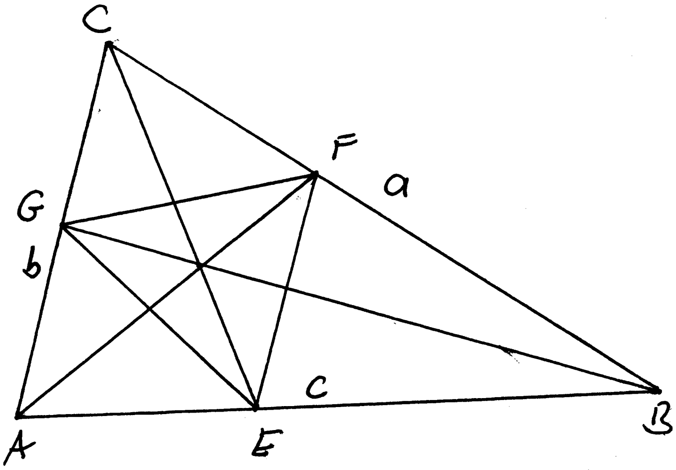
$$p(A,F) \parallel p(D,C) \xRightarrow{T.T.} \frac{BA}{AD} = \frac{BF}{FC}$$

$$\xRightarrow{AD \cong AC} \frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC}$$

q.e.d.

(#) Raznostraničan trougao ΔABC ima dužine stranica a, b i c. Neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Znamo da simetrala unutrašnjeg ugla u trouglu dijeli naspremnu stranicu u omjeru druge dvije stranice, pa imamo $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$. Iskoristiti ovu jednakost i pokazati da je $BE = \frac{ac}{a+b}$.

Rj.



CE simetrala $\measuredangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}, \quad AC = b, \quad BC = a,$$

$BE = c - AE$ pa imamo

$$\frac{AE}{c - AE} = \frac{b}{a} \Rightarrow AE = \frac{b}{a}(c - AE)$$

$$AE + \frac{b}{a} AE = \frac{bc}{a}$$

$$AE\left(\frac{a+b}{a}\right) = \frac{bc}{a}$$

$$AE = \frac{bc}{a+b}$$

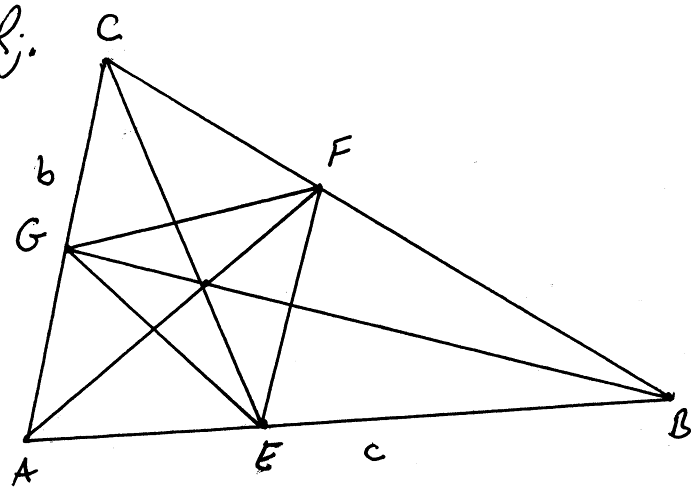
$$BE = c - AE = c - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a+b) - bc}{a+b} = \frac{ac}{a+b}$$

q.e.d.

\# Neka je ΔABC raznostraničan trougao i neka je ΔEFG trougao čija su tjemena podnožja simetrala unutrašnjih uglova trougla ΔABC, gdje je $E \in AB$. Dokazati da

$$P_{\Delta AEG} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+c)(a+b)} .$$

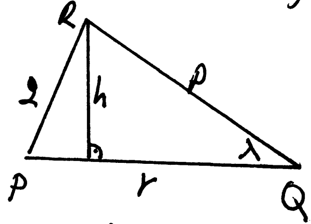
Rj.



$$P_{\Delta AEG} = \frac{AE \cdot AG}{2} \sin\alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \sin\alpha = \frac{b \cdot c}{2} \sin\alpha$$

Od ranije znamo da za proizvoljan ΔPQR gdje je $\measuredangle PQR = \lambda$ vrijedi



$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot p}{2} \sin\lambda$$

Ovu formulu nije teško izvesti

$$\sin\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow h = p\sin\lambda$$

$$P_{\Delta PQR} = \frac{r \cdot h}{2} = \frac{r \cdot p}{2} \sin\lambda$$

Simetrala unutrašnjeg ugla u Δ dijeli naspramnu stranicu u omjeru druge dvije pa imamo

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE}{c - AE} = \frac{b}{c} \Rightarrow \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \Rightarrow AE = \frac{bc}{a+b}$$

Slično

$$\frac{AG}{GC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{AG}{b - AG} = \frac{c}{a} \Rightarrow \overset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \Rightarrow AG = \frac{bc}{a+c}$$

Prema tome

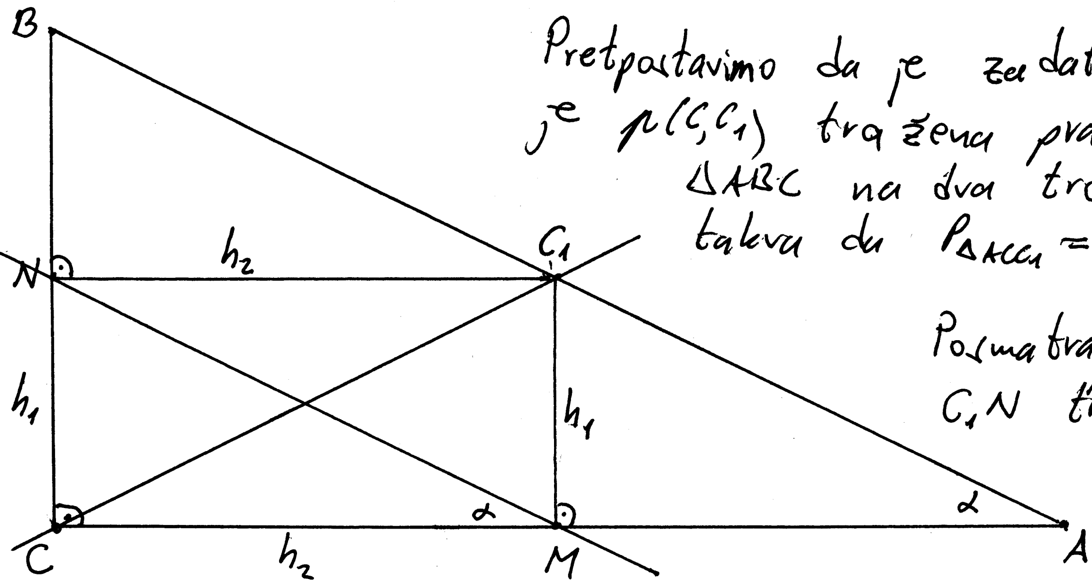
$$P_{\Delta AEG} = \frac{1}{2} AE \cdot AG \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \frac{bc}{(a+b)} \cdot \frac{bc}{(a+c)} \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} bc \sin\alpha \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = P_{\Delta ABC} \frac{bc}{(a+b)(a+c)}$$

q.e.d.

Kroz tačku C pravouglog trougla ΔABC konstruisati pravu koja će trougao podjeliti na dva dijela tako da su površine dobijenih dijelova jednaki.

Rj: Analiza



Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $p(C, C_1)$ tražena prava koja dijeli trougao ΔABC na dva trougla ΔCAC_1 i ΔCC_1B takva da $P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B}$.

Posmatrajmo visine C_1M i C_1N trouglova ΔACC_1 i ΔCC_1B. Uvedimo oznake $AC = b$, $BC = a$, $C_1M = h_1$ i $C_1N = h_2$.

$$P_{\Delta ACC_1} = P_{\Delta CC_1B} \Rightarrow \frac{h_1 \cdot b}{2} = \frac{h_2 \cdot a}{2} \Rightarrow h_1 b = h_2 a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_1}{h_2}$$

$$\xRightarrow{MC \cong NC_1 = h_2,\ CN \cong MC_1 = h_1} \frac{CA}{CB} = \frac{CM}{CN} \Rightarrow \frac{CA}{CM} = \frac{CB}{CN} \xRightarrow{O.T.T.} p(M,N) \parallel p(A,B)$$

$p(M,N) \parallel p(A,B)$ i $p(C,A)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle CMN \cong \measuredangle CAB = \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle MAC_1 \cong \measuredangle CMN = \alpha \\ \measuredangle AMC_1 \cong \measuredangle MCN = 90^\circ \\ MC_1 \cong CN \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \Delta AMC_1 \cong \Delta MCN$$

$$\Downarrow$$

$$CM \cong MA$$

$\Rightarrow$ NC_1 srednja linija ΔABC i M sredina AC

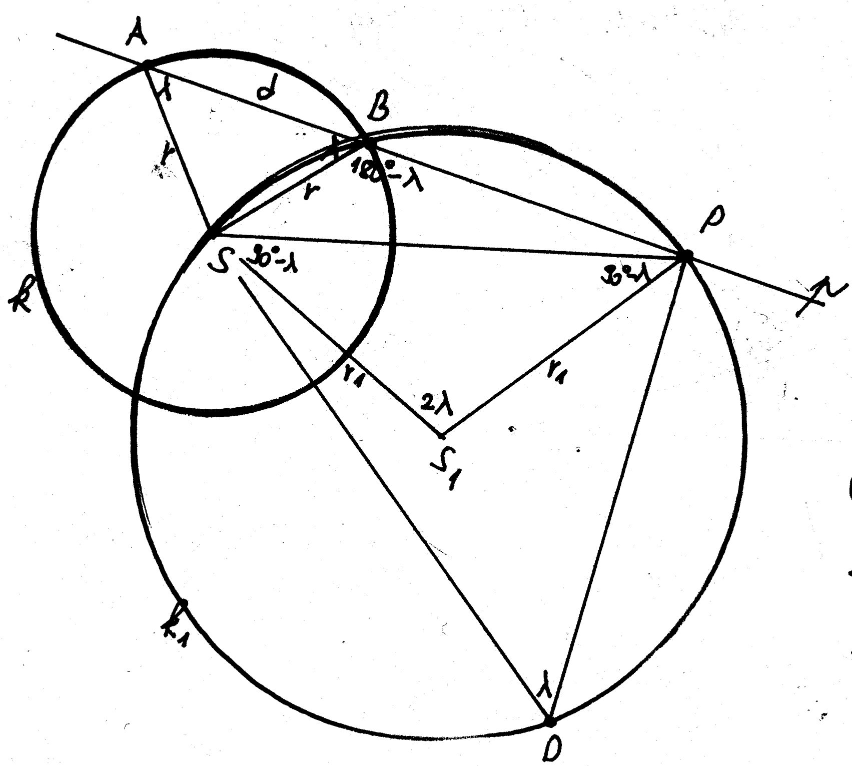
$\Rightarrow$ C_1 sredina hipotenuze AB

Kako je lagano pronaći sredinu C_1 hipotenuze AB to pravu $p(C, C_1)$ nije teško konstruisati.

Kroz datu tačku konstruisati pravu na kojoj data kružnica odsjeca tetivu podudarnu datoj duži.

<u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je p tražena prava koja prolazi kroz datu tačku P i na datoj kružnici $k(S,r)$ odsjeca tetivu AB podudarnu datoj duži d.

Označimo uglove

$\sphericalangle SAB \cong \sphericalangle SBA = \lambda$

$\Rightarrow \quad \sphericalangle PBS = 180° - \lambda$

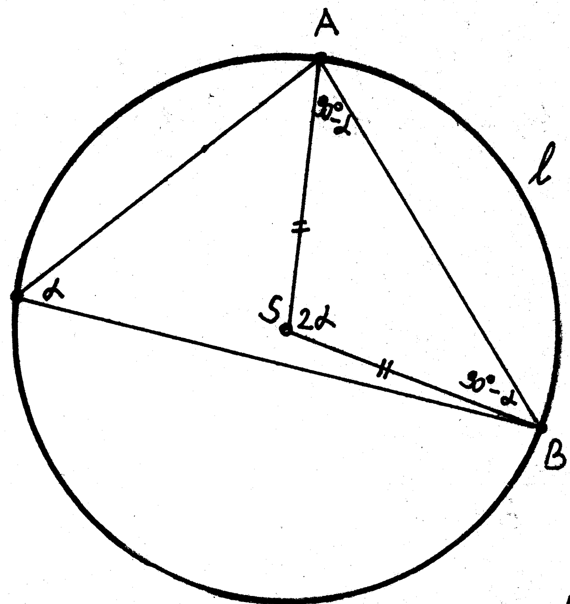
Ako je $k_1(S_1,r_1)$ kružnica opisana oko ΔSPB tada proizvoljan oštri periferiski ugao nad tetivom SP iznosi λ, centralni ugao nad tetivom SP je $\sphericalangle SS_1P = 2\lambda \Rightarrow \sphericalangle PSS_1 \cong \sphericalangle S_1PS = 90° - \lambda$.

U trouglu ΔASB su nam poznate sve tri stranice pa ugao λ možemo konstruisati. Kako je data duž PS to i kružnicu k_1 možemo konstruisati pa dobiti i tačku B. Sad nije teško konstruisati traženu pravu p.

(#) Konstruisati luk kružnice (l) čiji su krajevi date tačke A i B i kome su periferiski uglovi jednaki datom uglu α.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



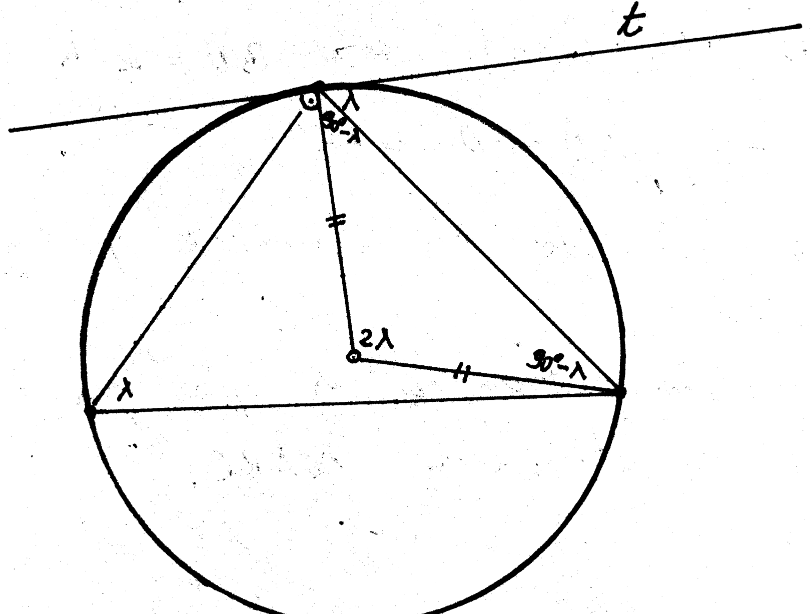
Neka su date tačke A i B, kružnica $k(S,SA)$ koja sadrži tačke A i B takva da su periferiski uglovi nad l (l je kružni luk čije su krajnje tačke A i B) jednaki datom uglu α.

Primetimo da je $\measuredangle BSA = 2\alpha$.

Kako je ΔASB jkk sa osnovicom AB imamo da je $\measuredangle SAB = \measuredangle SBA = 90° - \alpha$.

Prema tome ΔASB možemo konstruisati pa time i kružni luk l.

Primedba:



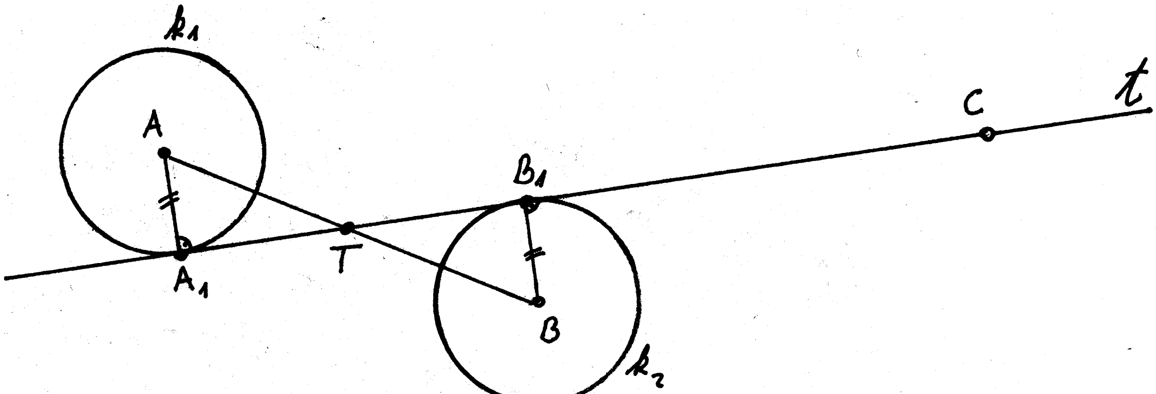
Primetite da je ugao između tangente i tetive jednak periferiskom uglu nad tom tetivom.

Prema tome luk kruga možemo konstruisati i na drugi način.

(#) Date su tri nekolinearne tačke A, B i C. Konstruisati dvije podudarne kružnice sa centrima u A i B, tako da tačka C pripada njihovoj zajedničkoj tangenti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



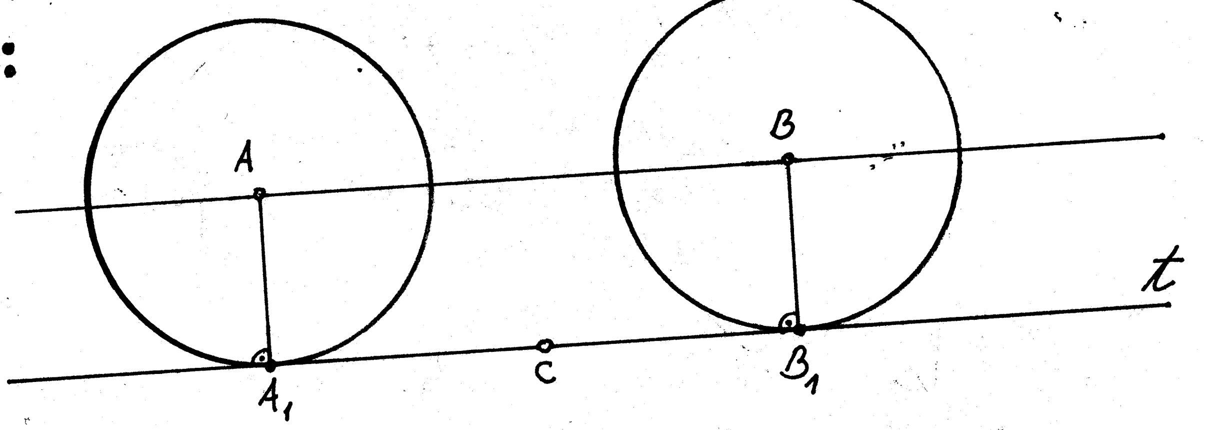
Neka su date tri nekolinearne tačke A, B i C i dvije podudarne kružnice (kružnice koje imaju podudaran poluprečnik) k_1 i k_2 koje imaju zajedničku tangentu t u tačkama A_1 i B_1 i $C \in t$. Neka je $\{T\} = AB \cap t$.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ATA_1 \cong \sphericalangle BTB_1 \text{ (unakrsni)} \\ \sphericalangle AA_1T \cong \sphericalangle BB_1T = 90^\circ \\ AA_1 \cong BB_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle AA_1T \cong \triangle BB_1T \Downarrow AT \cong BT$$

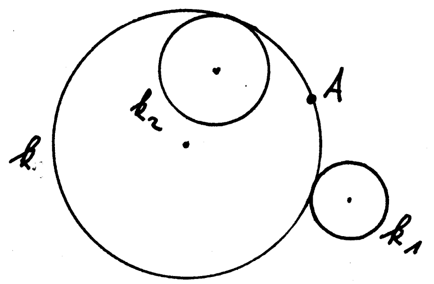
Kako $T \in t$ pravu t možemo konstruisati.

Kako su $AA_1 \perp t$ i $BB_1 \perp t$ kružnice k_1 i k_2 možemo konstruisati.

II rješenje:



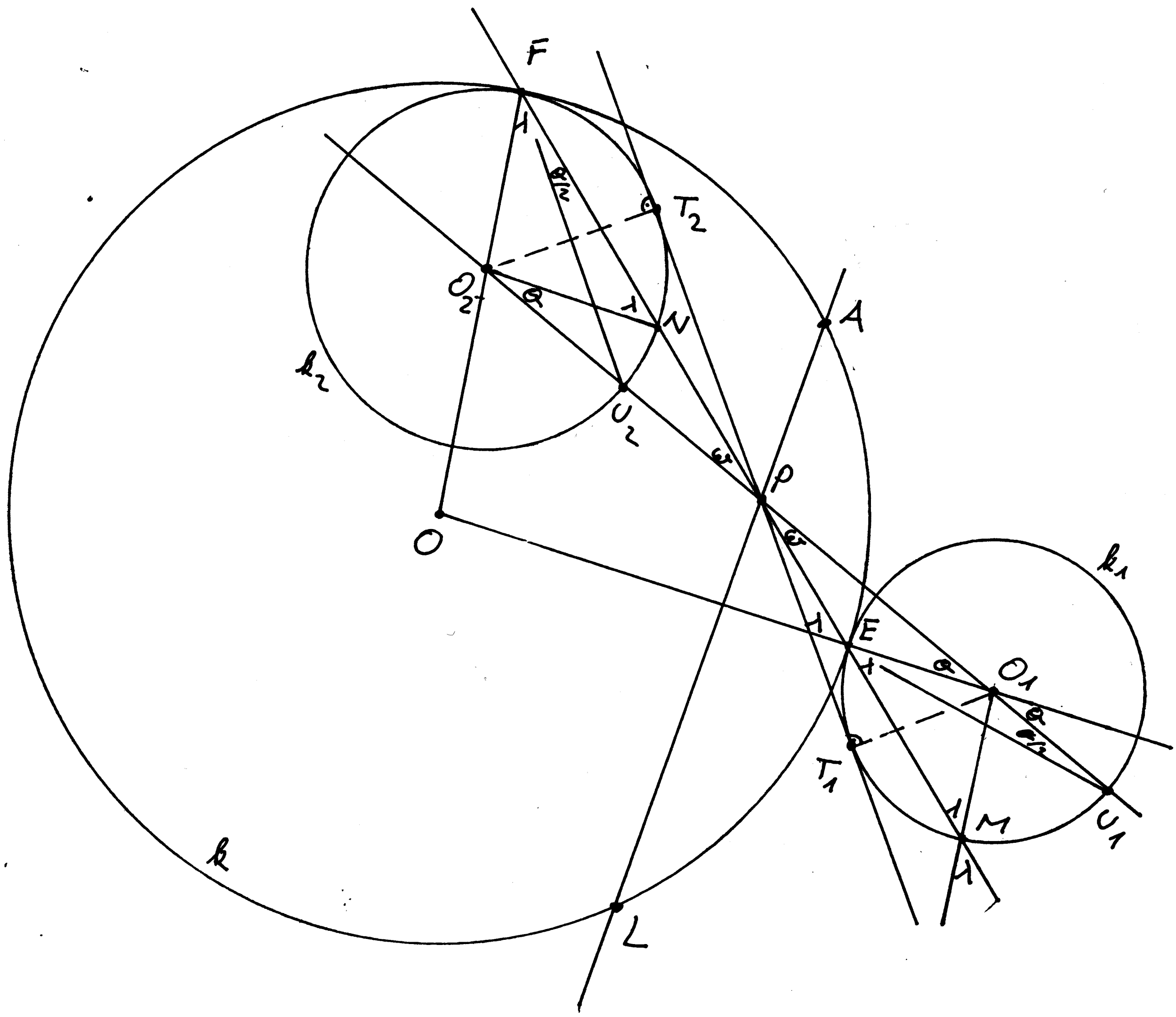
Dati su krugovi $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ i tačka A. Konstruisati krug k koji će prolaziti kroz tačku A i dodirivati krugove k_1 i k_2 kao na sljedećoj skici:



Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(O, r)$ traženi krug koji prolazi kroz tačku A i dodiruje date krugove $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$ $(r_1 < r_2)$ redom u tačkama E i F. Kako su E i F dodirne tačke krugova primijetimo da imamo sljedeća dva poretka $O-E-O_1$ i $O-O_2-F$.

Neka je $p(E,F) \cap k_2 = \{F, N\}$ i $p(E,F) \cap k_1 = \{E, M\}$: $F-N-E-M$,

$p(O_1,O_2) \cap k_1 = \{U_1\}$ i $p(O_1,O_2) \cap k_2 = \{U_2\}$: $O_2 - U_2 - O_1 - U_1$,

$\{P\} = p(O_1,O_2) \cap p(E,F)$

(kako O_1, O_2, E i F pripadaju nekim od krugova k_1 i k_2 primjetimo da je poredak $U_2 - P - O_1$ i $N - P - E$.

Trouglovi $\triangle O_1EM$, $\triangle OEF$ i $\triangle O_2FN$ su jkk. pa imamo

$$\measuredangle O_1EM \cong \measuredangle O_1ME \cong \measuredangle OEF \cong \measuredangle OFN \cong \measuredangle O_2FN \cong \measuredangle O_2NF = \lambda$$

$\Rightarrow p(O,O_1) \parallel p(O_2,N)$ i $p(O_1,M) \parallel p(F,O)$

(imamo podudarne uglove na transferzali $p(E,F)$)).

Označimo sa θ ugao $\measuredangle NO_2U_2$. To je centralni periferički ugao nad tetivom NU_2. Njemu odgovara periferički ugao $\measuredangle U_2FN = \frac{\theta}{2}$.

Kako je $p(O_2,N) \parallel p(E,O_1)$ i $p(O_1,O_2)$ njihova transferzala imamo $\measuredangle NO_2U_2 \cong \measuredangle PO_1E = \theta \Rightarrow \measuredangle O_1U_1E = \frac{\theta}{2}$.

Sad možemo pokazati da su $\triangle FU_2P$ i $\triangle U_1EP$ slični

$$\left.\begin{aligned} \measuredangle U_1PE &\cong \measuredangle FPU_2 = \omega \\ \measuredangle PU_1E &\cong \measuredangle PFU_2 = \frac{\theta}{2} \\ \measuredangle U_1EP &\cong \measuredangle FU_2P \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{st. UUU}} \triangle PU_1E \sim \triangle PFU_2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{PE}{PU_2} = \frac{PU_1}{PF} \Rightarrow PE \cdot PF = PU_1 \cdot PU_2 \quad \ldots(1)$$

Neka je $p(P,A) \cap k = \{A, L\}$.

Možemo primjetiti $PA \cdot PL = PE \cdot PF \quad \ldots(2)$

$$(1) \text{ i } (2) \Rightarrow PU_1 \cdot PU_2 = PA \cdot PL \Rightarrow PL = \frac{PU_1 \cdot PU_2}{PA}$$

Da bi smo konstruisali tačku L potrebno je konstruisati tačku P. Primjetimo $\triangle PO_1E \sim \triangle PO_2N$ i $\triangle PO_1M \sim \triangle PFO_2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{PO_1}{PO_2} &= \frac{PE}{PN} = \frac{O_1E}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2} \\ \frac{PO_1}{PO_2} &= \frac{PM}{PL} = \frac{O_1M}{O_2F} = \frac{r_1}{r_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

P je centar homotetije koja kružnicu k_1 preslikava u k_2 sa koeficijentom $\frac{r_1}{r_2}$

Neka je $p(P,T_1)$ tangenta na kružnicu k_1.

Kako je P centar homotetije $p(P,T_2)$ je tangenta i na kružnicu k_2.

Sad tačku P možemo konstruisati, pa time i tačku L. Imamo tačke A, L i kružnicu k_1 pa smo ovaj problem sveli na 3. Apolonijev problem.

Univerzitet u Zenici
Pedagoški fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 10.09.2012.

Pismeni ispit iz predmeta **Euklidska geometrija II**

Zadatak br. 1

(20%) a) Neka je $\triangle PQR$ dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR = \varphi$). Polazeći isključivo od površine pravouglog trougla ($P = \frac{a \cdot b}{2}$, a i b su katete) i definicije trigonometriskih funkcija, izvesti formulu za površinu $P = \dfrac{r \cdot q}{2} sin\varphi$ datog trougla.

(20%) b) Dat je jednakokraki trougao $\triangle ABC$ sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

(60%) c) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Zadatak br. 2

(40%) a) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina stranice BC, a N sredina stranice CD.

(60%) b) Dat je $\triangle ABC$. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD + EB = DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Zadatak br. 3

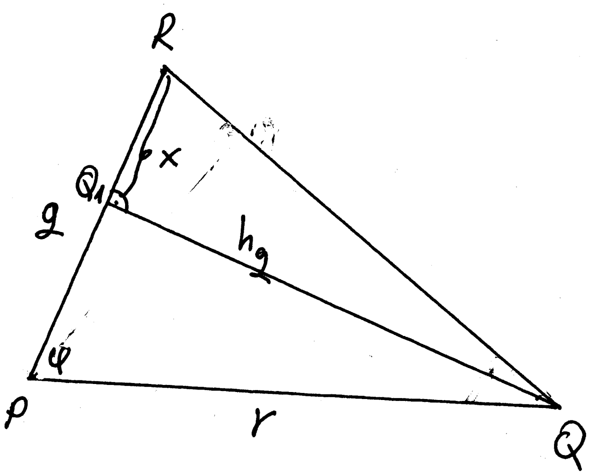
(20%) a) Neka je I centar upisanog kruga $\triangle ABC$, ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla $\triangle ABC$ i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M, S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A, C)$), dokazati da je $\triangle BNI$ pravougli trougao.

(20%) b) Dat je krug i u njegovoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u taj krug pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

(60%) c) Dati je krug $k_1(S_1, r_1)$, prava t i tačka $T \in t$. Konstruisati krug $k(S, r)$ koji dodiruje krug k i koji dodiruje pravu t u tački T. (Detaljno sprovesti samo Analizu. Konstrukciju, Dokaz i Diskusiju možete uraditi, ali bodovati će se samo Analiza.)

\# Neka je ΔPQR dati raznostraničan trougao sa uglom φ kod vrha P ($\measuredangle QPR=\varphi$). Polazeći isključivo od formule za površinu pravouglog trougla ($P=\frac{a\cdot b}{2}$, a i b katete) i definicije trigonometrijskih f-ja izvesti formulu za površinu datog trougla. $\underline{P=\frac{r\cdot g}{2}\sin\varphi}$.

Rj.



Neka je $QQ_1=h_g$ visina datog trougla. Tada

$$\sin\varphi=\frac{h_g}{r} \Rightarrow$$

$$h_g=r\sin\varphi \quad \ldots(1)$$

Površina datog trougla se može izračunati po formuli $P=\frac{h_g\cdot g}{2}$. Ovo nije teško izvesti (neka je $x=RQ_1$)

$$P_{\Delta PQR}=P_{\Delta PQQ_1}+P_{\Delta QRQ_1}=\frac{(g-x)\,h_g}{2}+\frac{x\cdot h_g}{2}=\frac{g\cdot h_g}{2}$$

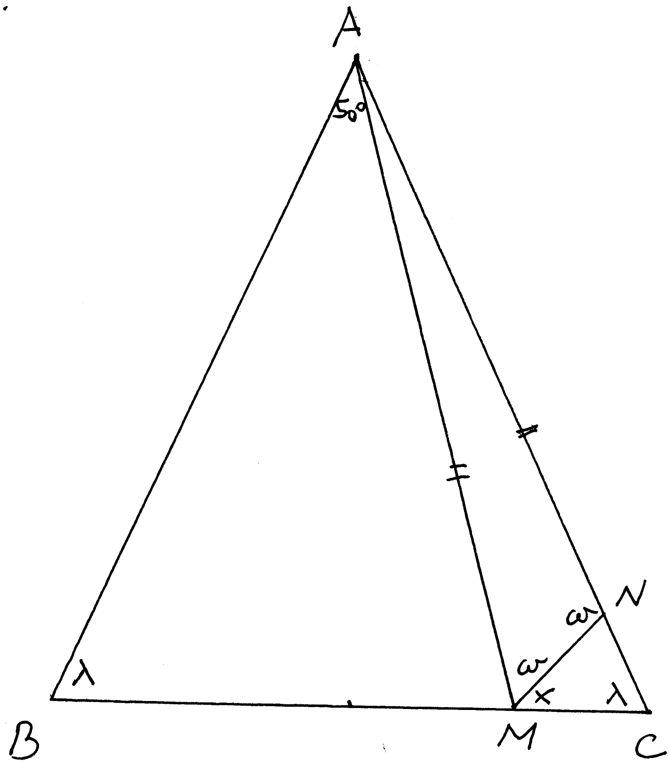
Prema tome

$$P_{\Delta PQR}=\frac{h_g\cdot g}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r\cdot g}{2}\sin\varphi$$

q.e.d.

(#) Zadan je jednakokraki trougao ΔABC sa osnovicom BC tako da je ugao $\measuredangle BAC > 50°$. Na osnovici BC data je tačka M takva da je ugao $\measuredangle BAM = 50°$, a na kraku AC tačka N takva da je $AM \cong AN$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$.

Rj.



$\measuredangle MNA$ je vanjski ugao ΔMCN

$$\omega = x + \lambda \quad \ldots (1)$$

$\measuredangle AMC$ je vanjski ugao ΔABM

$$50° + \lambda = \omega + x \quad \ldots (2)$$

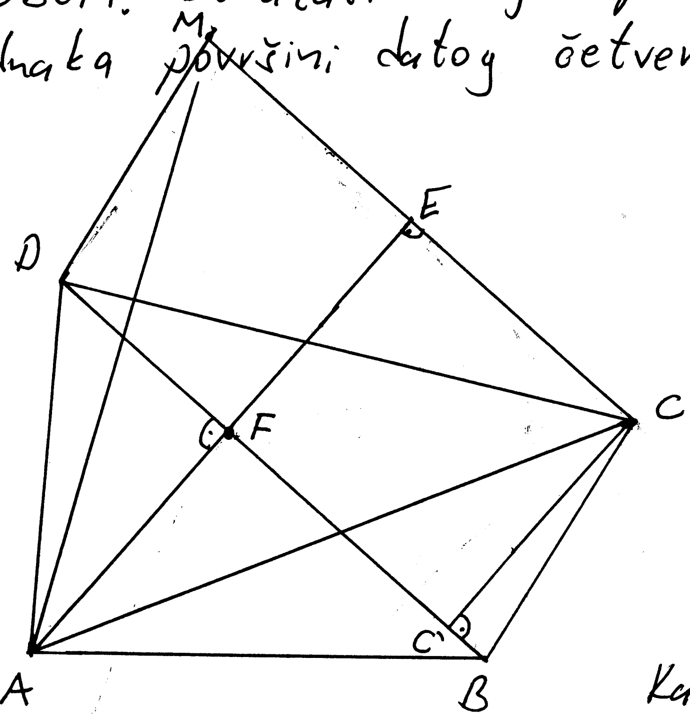
$(1)+(2)$: $\quad \omega + 50° + \lambda = x + \lambda + \omega + x$

$$2x = 50°$$

$$x = 25°$$

(#) Dat je četverougao $\square ABCD$. Konstruisan je paralelogram $\square DBCM$. Dokazati da je površina trougla $\triangle ACM$ jednaka površini datog četverougla $\square ABCD$.

Rj.



Neka je AE visina trougla $\triangle ACM$.

Tada

$$P_{\triangle ACM} = \frac{AE \cdot CM}{2} \quad \ldots (*)$$

Označimo sa F presječnu tačku od BD i AE.

Kako je $BD \parallel MC$ i $AE \perp MC$ to je $AE \perp BD \Rightarrow AF$ visina $\triangle ABD$.

$$P_{\triangle ABD} = \frac{AF \cdot BD}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} \quad \ldots (**)$$

Posmatrajmo $\triangle BCD$, i visinu CC' iz vrha C na stranicu BD.

Imamo $CC' \parallel EF$ i $CE \parallel C'F \Rightarrow \square C'CEF$ paralelogram

$$\Rightarrow CC' \cong EF \Rightarrow P_{\triangle BCD} = \frac{CC' \cdot BD}{2} = \frac{EF \cdot MC}{2} \quad \ldots (***)$$

Prema tome

$$P_{\triangle ACM} \overset{(*)}{=} \frac{AE \cdot MC}{2} = \frac{(AF+FE) \cdot MC}{2} = \frac{AF \cdot MC}{2} + \frac{FE \cdot MC}{2}$$

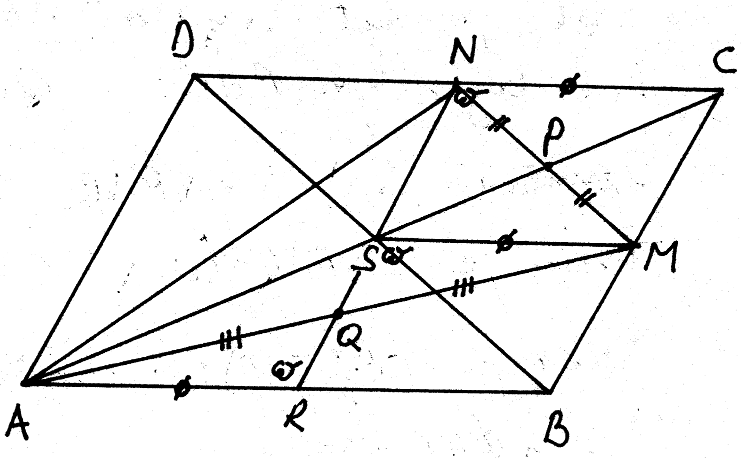
$$\overset{(**)\ i\ (***)}{=} P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = P_{\square ABCD}$$

q.e.d.

(#) Date su tačke A, M i N. Konstruisati paralelogram $\square ABCD$, tako da je M sredina BC, a N sredina stranice CD.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Dat je paralelogram $\square ABCD$, gdje su M sredina BC i N sredina CD.

Neka je tačka S presjek dijagonala AC i BD.

Dijagonale u paralelogramu se polove pa je S sredina dijagonala AC i BD.

S sredina BD, N sredina CD $\xRightarrow{u\ \triangle BCD}$ SN sred. lin. $\Rightarrow SN \parallel p(B,C)$

S sredina BD, M sredina BC $\xRightarrow{u\ \triangle DBC}$ SM sred. lin $\Rightarrow SM \parallel p(C,D)$

pa je $\square SMCN$ paralelogram. Neka je $\{P\} = SC \cap MN$

$\Rightarrow$ P sredina MN i P sredina SC tj. $MP \cong NP$.

Neka je $\{R\} = p(N,S) \cap AB$. Tad $\left.\begin{aligned} &\sphericalangle ASR \cong \sphericalangle NSC \\ &\sphericalangle ARS \cong \sphericalangle SNC = \omega \\ &AS \cong SC \end{aligned}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle ARS \cong \triangle CNS \Downarrow AR \cong CN \ ...(*)$

Neka je $\{Q\} = SR \cap AM$. Tada: $\left.\begin{aligned} &\sphericalangle AQR \cong \sphericalangle SQM \\ &\sphericalangle QRA \cong \sphericalangle QSM = \omega \\ &AR \cong SM \end{aligned}\right\} \xRightarrow{UUS} \triangle ARQ \cong \triangle MSQ \Downarrow AQ \cong QM \ ...(**)$

Na osnovu $(*)$ i $(**)$ $\Rightarrow$ S težište $\triangle AMN$.

Tačku S možemo konstruisati, a time i $p(N,C)$ i $p(M,C)$. Sad nije problem dobiti tačke B i D a time i $\square ABCD$.

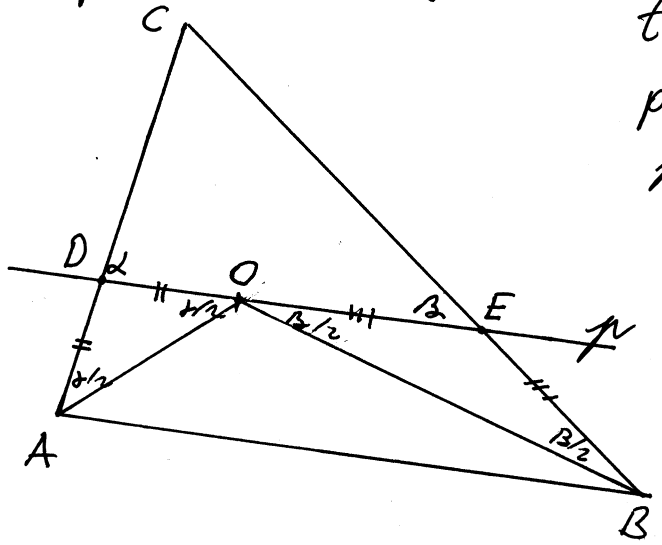
(#) Dat je ΔABC. Konstruisati pravu p paralelnu stranici AB, tako da bude $AD+EB=DE$, gdje je D tačka presjeka tražene prave p sa AC, a E presječna tačka prave p sa stranicom BC datog trougla.

Rj:

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je ΔABC dati trougao, i neka je p tražena prava takva da $B, E \in p$, $p \parallel AB$, $p \cap AC=\{D\}$, $p \cap \{B,C\}=\{E\}$ i

$AD+BE=DE$.



Na duži DE izaberimo tačku O takvu da $AD \cong DO$, i

Kako je $AD+BE=DE$ to je $OE \cong BE$.

$p \parallel AB$ i $p(A,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle BAC \cong \measuredangle EDC = \alpha$.

$p \parallel AB$ i $p(B,C)$ transferzala $\Rightarrow \measuredangle ABC \cong \measuredangle DEC = \beta$.

$\measuredangle EDC = \alpha$ je vanjski ugao jednakokrakog $\Delta AOD \Rightarrow$

$\Rightarrow \measuredangle AOD \cong \measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $\measuredangle DEC = \beta$ je vanjski ugao jkk $\Delta OBE \Rightarrow$

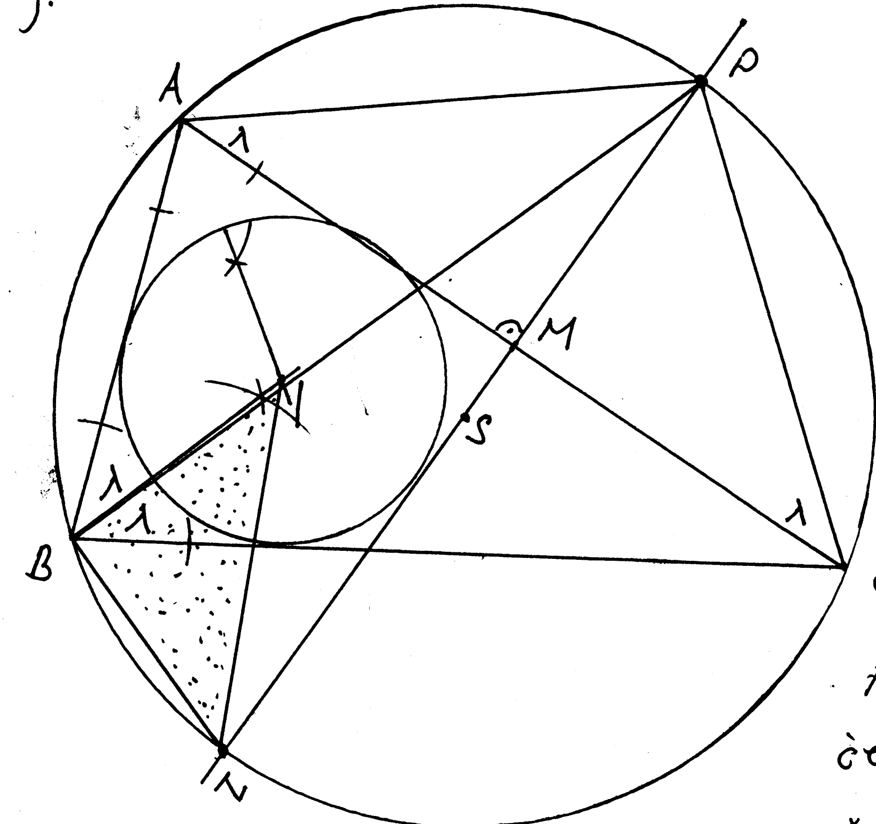
$\Rightarrow \measuredangle OBE \cong \measuredangle BOE = \frac{\beta}{2}$.

$$\measuredangle OAB = \alpha/2 \quad i \quad \measuredangle OBA = \beta/2$$

Kako je dat ΔABC to su dati i uglovi α i β pa tačku O nije teško konstruisati. Kako $O \in p$ i $p \parallel AB$ to nije teško konstruisati i pravu p.

(#) Neka je I centar upisanog kruga ΔABC ($AB < BC$), tačka S centar opisanog kruga k oko trougla ΔABC i tačka M sredina stranice AC. Ako su P i N tačke dobijene presjekom prave $p(M,S)$ i kruga k (gdje su tačke B i N sa jedne strane, a tačka P sa druge strane prave $p(A,C)$), dokazati da je ΔBNI pravougli.

Rj.



Posmatrajmo trouglove ΔAMP i ΔPMC. Imamo

$AM \cong MC$ (M sredina AC)
$\measuredangle AMP \cong \measuredangle CMP = 90^\circ$
($S-M-P$ i tačka S leži na simetrali stranice AC)
$PM \cong PM$

$\xRightarrow{SUS}$ $\Delta AMP \cong \Delta CMP$

$\Downarrow$

$\measuredangle PAM \cong \measuredangle PCM = \lambda$

Posmatrajmo sad tetivni četverougao $\square BCPA$. Imamo

$\measuredangle ABP \cong \measuredangle PCA = \lambda$ i

$\measuredangle PBC \cong \measuredangle PAC = \lambda$

$\Rightarrow$ $p[B,P)$ je simetrala ugla $\measuredangle ABC$ tj. tačka $I \in BP$.

Ugao nad prečnikom je prav pa $\measuredangle NBP = 90^\circ$ tj.

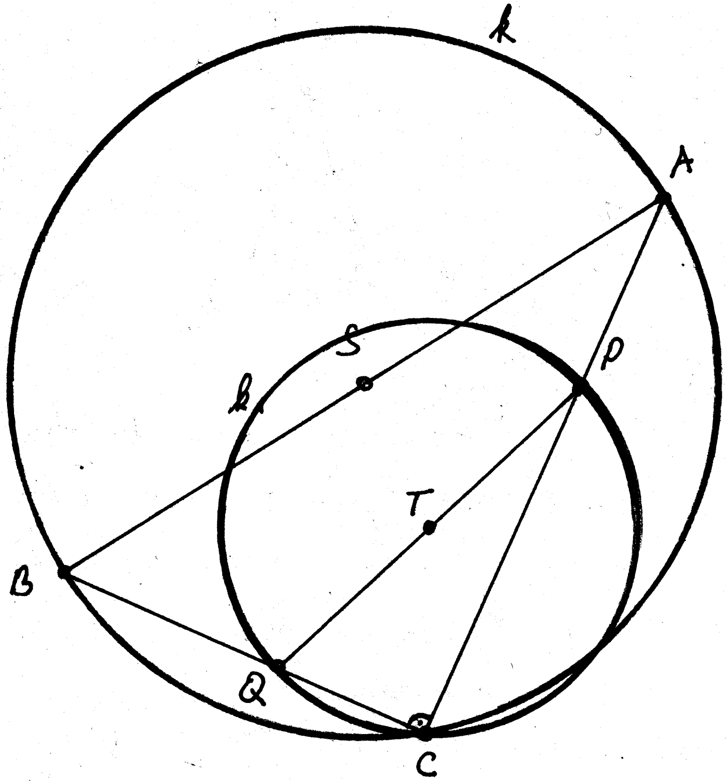
$\measuredangle NBI = 90^\circ$ $\Rightarrow$ ΔNBI je pravougli

q.e.d.

(#) Data je kružnica i u njenoj unutrašnjosti tačke P i Q. Upisati u tu kružnicu pravougli trougao čija jedna kateta sadrži tačku P, a druga tačku Q.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je data kružnica $k(S, SA)$ u čiju je unutrašnjost upisan pravougli ΔABC sa hipotenuzom AB. Neka su tačke P i Q takve da $P \in AC$ i $Q \in BC$.

Primjetimo da je $\measuredangle BCA$ ugao nad prečnikom.

Ako oko ΔPQC opišemo kružnicu, kako je $\measuredangle QCP = 90°$ to je centar opisane kružnice k_1 oko ΔPQR u tački T (sredini duži PQ).

Kako je kružnica k data, a možemo naći sredinu T duži PQ to možemo konstruisati tačku C a time i ΔABC.

(#) Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu i datu pravu u datoj tački te prave.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $k(S,r)$ tražena kružnica koja dodiruje datu pravu t u datoj tački T i koja dodiruje datu kružnicu $k_1(S_1,r_1)$ u tački P. Primjetimo da je $p(S,T) \perp t$ i da je $S-P-S_1$ (zato što je P dodirna tačka kružnica k i k_1). Neka je n prava koja prolazi kroz S_1 i $n \perp t$. Označimo sa $\{R\} = n \cap t$ i $\{M,N\} = n \cap k_1$ tako da je $R-M-N$.

Pokažimo da duž SS_1 siječe duž TN u tački P.

Posmatrajmo trouglove $\triangle PNS_1$ i $\triangle PTS$.

$p(S,T) \parallel n$ i $p(S,S_1)$ transferzala $\Rightarrow \sphericalangle TSP \cong \sphericalangle NS_1P = \varepsilon$

$\triangle SPT$ jkk $\Rightarrow \sphericalangle STP \cong \sphericalangle SPT = \omega$ i $\sphericalangle S_1NP \cong \sphericalangle NPS_1 = \omega$

$p(S,S_1)$, $P \in SS_1$, $\sphericalangle SPT = \sphericalangle S_1PN = \omega \Rightarrow$ uglovi $\sphericalangle SPT$ i $\sphericalangle NPS_1$ su unakrsni uglovi $\Rightarrow NT \cap SS_1 = \{P\}$.

Kako pravu n možemo konstruisati to možemo konstruisati i tačku P a time i tačku S ($\{S\}$ = simetrala duži $PT \cap p(S,T)$)

Sad možemo konstruisati traženu kružnicu $k(S, ST)$.